累乗根を筆算で求める方法

製作：赤門会（math.akamon-kai.co.jp）

※開平計算（開平法ともよぶ。平方根の値を小数に展開する筆算）

$\sqrt{2}$ を小数第４位まで決定する計算は以下のようになります。

図１

	1					←(1)
	1					←(1)
(4)→	2	4				←(5)
		4				←(5)
(8)→	2	8	1			←(9)
			1			←(9)
(12)→	2	8	2	4		←(13)
				4		←(13)
(16)→	2	8	2	8	2	←(17)
					2	←(17)
	2	8	2	8	4	←(20)

	↓(1)		↓(5)		↓(9)		↓(13)		↓(17)	
	1		4		1		4		2	
√	2.	0	0	0	0	0	0	0	0	
	1									←(2)
	1	0	0							←(3)
		9	6							←(6)
			4	0	0					←(7)
			2	8	1					←(10)
			1	1	9	0	0			←(11)
			1	1	2	9	6			←(14)
					6	0	4	0	0	←(15)
					5	6	5	6	4	←(18)
						3	8	3	6	←(19)

括弧付き数字の順に数字を埋めていきます。手順は

(1)　二乗が２を超えない最大の整数を書く。

(2)　(1)の二乗を書く。

(3)　上の二行の差を求め、０を二つ下ろす。

(4)　(1)を二行書いたものを加える。

(5)　(4)の末尾に一桁付け加え、下にも同じ数を書く。このとき、この二行の積が(3)を超えない範囲で最大のものを選ぶ。

(6)　(5)の二行の積を書く。

(7)　上の二行の差を求め、０を二つ下ろす。

(8)　上の二行を加える。

(9)　(8)の末尾に一桁付け加え、下にも同じ数を書く。このとき、この二行の積が(7)を超えない範囲で最大のものを選ぶ。

(10)　(9)の二行の積を書く。

(11)　上の二行の差を求め０を二つ下ろす。

(12)　上の二行を加える。

(13)　(12)の末尾に一桁付け加え、下にも同じ数を書く。このとき、この二行の積が(10)を超えない範囲で最大のものを選ぶ。

(14)　(13)の二行の積を書く。

(15)　上の二行の差を求め、0 を二つ下ろす。

(16)　上の二行を加える。

…（(17)以降も同様に繰り返す。）…

これで、どうして平方根を求めていることになるのかを考えてみます。

$\sqrt{2}$ の整数部分が 1 であることは

$1 < 2 < 4$ より $1 = \sqrt{1} < \sqrt{2} < \sqrt{4} = 2$

であることからわかります。$\sqrt{2}$ の小数第 1 位が 4 であることは、

$1.96 < 2 < 2.25$ より $1.4 = \sqrt{1.96} < \sqrt{2} < \sqrt{2.25} = 1.5$

であることからわかります。このように 2 を適当な数の二乗で挟むことによって、$\sqrt{2}$ の小数展開が求められることになります。

図 1 の筆算はこの計算をうまくやるためのものです。

例えば、(7)をみてみます。400 と書いてありますが、もとの 2 の右に小数点があるので、それに合せて小数点を打つと(7)は 0.04 を表すことになります。これは上の二行の差で得られたので、同じように小数点の位置を考えると、

$0.04 = 1 - 0.96$

という計算をしていることになります。(6)の 0.96 はどのようにして得られたかというと、(5)の二行の積でした。これも適当に小数点を補えば、

$0.96 = 2.4 \times 0.4$

という計算をしているとみなしてもよいでしょう。このように順に計算を逆に追っていくと、

(7)　$0.04 = 1 - 0.96$

(6)　$0.96 = 2.4 \times 0.4$

(4)　$2 = 1 + 1 = 1 \times 2$

(3)　$1 = 2 - 1$

(2)　$1 = 1 \times 1$

となります。順に代入すると（$2.4 = 2 + 0.4$ に注意）

$0.04 = (2 - 1 \times 1) - (1 \times 2 + 0.4) \times 0.4$

つまり、

$0.04 = 2 - (1 \times 1 + 2 \times 1 \times 0.4 + 0.4 \times 0.4)$

ですから、公式 $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ により

$0.04 = 2 - 1.4^2$

となります。以上より、

$$2-1.4^2>0$$

$$\therefore 1.4^2<2$$

を示すことができたことになります。一方で(5)では5がたちません。5では(7)の差を計算するときに、上の行のほうが小さくなってしまうからです。つまり、

$$-0.25=1-1.25$$

となります。同じように逆に追っていくと、

$$-0.25=(2-1\times1)-(1\times2+0.5)\times0.5$$

$$-0.25=2-(1\times1+2\times1\times0.5+0.5\times0.5)$$

$$-0.25=2-1.5^2$$

$$2-1.5^2<0$$

$$2<1.5^2$$

となります。つまり(7)の計算が終わった時点で

$$1.4^2<2<1.5^2$$

を示すことができたわけです。同様にして(15)まで計算すれば

$$1.41^2<2<1.42^2$$

を示すことができます。やってみます。

(8)　$2.8=2.4+0.4$

(10)　$0.0281=2.81\times0.01$

(11)　$0.0119=0.04-0.0281$

ですから、左側の計算に注目すると

$$2.8=2.4+0.4=2+0.4\times2=1+1+0.4\times2=2\times(1+0.4)=2\times1.4$$

となりますから、(7)までの結論と合せて

$$0.0119=(2-1.4^2)-(2\times1.4+0.01)\times0.01$$

$$0.0119=2-(1.4^2+2\times1.4\times0.01+0.01^2)$$

$$0.0119=2-1.41^2$$

ですし、(9)で2をたててしまうと

(11)　$-0.0164=0.04-0.282\times0.02$

となるので、同じように追っていって、

$$-0.0164=(2-1.4^2)-(2\times1.4+0.02)\times0.02$$

$$-0.0164=2-(1.4^2+2\times1.4\times0.02+0.02^2)$$

$$-0.0164=2-1.42^2$$

となります。以上より、

$$1.41^2<2<1.42^2$$

を示すことができたわけです。(19)までやれば

$$1.414^2<2<1.415^2$$

を示すことができるのですが、同じように説明するだけですのでここでは割愛します。小数部分が0ではない場合の議論は少し異なります。以下では、一般の場合（100より小さい正の数で小数部分が有限の桁数であるものの平方根）についてこのことを証明してみます。

［命題］

次の条件を満たす数列$\{a_n\}$、$\{b_n\}$、$\{c_n\}$、$\{d_n\}$、$\{x_n\}$、$\{y_n\}$を考える。ただし、数列$\{b_n\}$はあらかじめ与えられたものとする。Nは自然数であるとする。

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} 0.01^{k-1} b_k \quad \cdots(1)$$

$$x_n = \sum_{k=1}^{n} 0.1^{k-1} y_k \quad \cdots(2)$$

$$c_1 = 2y_1 \quad \cdots(3)$$

$$c_{n+1} = c_n + 2 \cdot 0.1^n y_{n+1} \quad \cdots(4)$$

$$d_1 = b_1 - {y_1}^2 \quad \cdots(5)$$

$$d_{n+1} = d_n + 0.01^n b_{n+1} - \left(c_n + 0.1^n y_{n+1}\right) 0.1^n y_{n+1} \quad \cdots(6)$$

y_n：(6)においてy_{n+1}を決定するとき、0以上9以下の整数で$d_{n+1} \geq 0$となるもののうち最大のものをy_{n+1}とする。またy_1は0以上9以下の整数で、$b_1 > {y_1}^2$を満た

b_n：0以上99以下の整数、$n > N$ならば$b_n = 0$

このとき、

$${x_n}^2 \leq a_N < \left(x_n + 0.1^{n-1}\right)^2$$

が成り立つ。

［証明］

まず☆を満たすy_{n+1}が存在し、数列$\{x_n\}$、$\{y_n\}$が定義できることを示す。

以下Kを自然数とし、$x_1, x_2, \cdots, x_K$と$y_1, y_2, \cdots, y_K$は条件にあうように定義されているとする。とくに断らない限り$n \leq K$とする。(3)(4)より

$$c_n = c_1 + \sum_{k=1}^{n-1} 2 \cdot 0.1^k y_{k+1} = 2y_1 + \sum_{k=1}^{n-1} 2 \cdot 0.1^k y_{k+1} = 2\sum_{j=1}^{n} 0.1^{j-1} y_j = 2x_n$$

（$2 \leq n \leq K$）

これと(2)(3)より

$$c_n = 2x_n \quad (1 \leq n \leq K) \quad \cdots(7)$$

(6)(7)より

$$d_{n+1}$$

$$= d_n + 0.01^n b_{n+1} - (c_n + 0.1^n y_{n+1}) 0.1^n y_{n+1}$$

$$= d_n + 0.01^n b_{n+1} - (2x_n + 0.1^n y_{n+1}) 0.1^n y_{n+1}$$

$$= d_n + 0.01^n b_{n+1} - \left\{ 2x_n \cdot 0.1^n y_{n+1} + (0.1^n y_{n+1})^2 \right\}$$

$$= d_n + 0.01^n b_{n+1} - \left\{ (x_n + 0.1^n y_{n+1})^2 - x_n{}^2 \right\} \quad （1 \le n \le K-1）$$

ゆえに、

$$d_{n+1} = d_n + 0.01^n b_{n+1} - (x_{n+1}{}^2 - x_n{}^2) \quad （1 \le n \le K-1）\cdots(8)$$

(1)(2)(5)(8)より

$$d_n$$

$$= d_1 + \sum_{k=1}^{n-1} \left[0.01^k b_{k+1} - (x_{k+1}{}^2 - x_k{}^2) \right]$$

$$= b_1 - y_1{}^2 + \sum_{k=1}^{n-1} \left[0.01^k b_{k+1} - (x_{k+1}{}^2 - x_k{}^2) \right]$$

$$= b_1 - y_1{}^2 + \sum_{k=1}^{n-1} 0.01^k b_{k+1} - \sum_{k=1}^{n-1} (x_{k+1}{}^2 - x_k{}^2)$$

$$= b_1 + \sum_{k=1}^{n-1} 0.01^k b_{k+1} - y_1{}^2 - \sum_{k=1}^{n-1} (x_{k+1}{}^2 - x_k{}^2)$$

$$= \sum_{j=1}^{n} 0.01^{j-1} b_k - x_1{}^2 - (x_n{}^2 - x_1{}^2)$$

$$= a_n - x_n{}^2 \quad （2 \le n \le K）$$

(1)(5)より $d_1 = a_1 - x_1{}^2$ であるから、上の結論とあわせて

$$d_n = a_n - x_n{}^2 \quad （1 \le n \le K） \quad \cdots(9)$$

☆より $d_n \ge 0$ だから

$$a_n - x_n{}^2 \ge 0 \quad （1 \le n \le K）$$

ゆえに

$$x_n{}^2 \le a_n \quad \cdots(10)$$

さらに、☆の条件より

$$0 > d_n + 0.01^n b_{n+1} - \{c_n + 0.1^n (y_{n+1} + 1)\} 0.1^n (y_{n+1} + 1) \qquad （1 \le n \le K - 1）$$

これと(7)(9)より

$$0 > a_n - x_n^{\ 2} + 0.01^n b_{n+1} - \{2x_n + 0.1^n (y_{n+1} + 1)\} 0.1^n (y_{n+1} + 1)$$

$$0 > a_n + 0.01^n b_{n+1} - \left[x_n^{\ 2} + 2x_n \cdot 0.1^n (y_{n+1} + 1) + \{0.1^n (y_{n+1} + 1)\}^2 \right]$$

$$0 > a_n + 0.01^n b_{n+1} - \{x_n + 0.1^n (y_{n+1} + 1)\}^2$$

$$0 > a_n + 0.01^n b_{n+1} - (x_n + 0.1^n y_{n+1} + 0.1^n)^2$$

$$0 > a_{n+1} - (x_{n+1} + 0.1^n)^2 \qquad （1 \le n \le K - 1）$$

☆の条件の y_1 の取り方と上の結論をあわせて

$$0 > a_n - (x_n + 0.1^{n-1})^2 \qquad （1 \le n \le K）$$

ゆえに

$$a_n < (x_n + 0.1^{n-1})^2 \qquad （1 \le n \le K） \qquad \cdots(11)$$

(10)(11)より

$$x_n^{\ 2} \le a_n < (x_n + 0.1^{n-1})^2 \qquad （1 \le n \le K） \qquad \cdots(12)$$

(1)より

$$100^{n-1} a_n = 100^{n-1} \sum_{k=1}^{n} 0.01^{k-1} b_k = \sum_{k=1}^{n} 100^{n-k} b_k$$

であるから、

$100^{n-1} a_n$ は整数　$\cdots$(13)

さらに

$$10^{n-1} x_n = 10^{n-1} \sum_{k=1}^{n} 0.1^{k-1} y_k = \sum_{k=1}^{n} 10^{n-k} y_k \qquad （1 \le n \le K）$$

であるから、

$10^{n-1} x_n$ は整数　（$1 \le n \le K$）　$\cdots$(14)

(12)より

$$a_K < \left(x_K + 0.1^{K-1}\right)^2$$

$$100^{K-1} a_K < \left(10^{K-1} x_K + 1\right)^2 \quad \cdots(15)$$

(13)(14)(15)より

$$100^{K-1} a_K \leq \left(10^{K-1} x_K + 1\right)^2 - 1$$

$b_{K+1} < 100$ であるから、上の結論とあわせて

$$100^{K-1} a_K \leq \left(10^{K-1} x_K + 1\right)^2 - 1 < \left(10^{K-1} x_K + 1\right)^2 - 10^{-2} b_{K+1}$$

ゆえに

$$100^{K-1} a_K < \left(10^{K-1} x_K + 1\right)^2 - 10^{-2} b_{K+1}$$

$$a_K < \left(x_K + 0.1^{K-1}\right)^2 - 0.01^K b_{K+1}$$

これと(7)(9)より

$$d_K + {x_K}^2 < \left(x_K + 0.1^{K-1}\right)^2 - 0.01^K b_{K+1}$$

$$d_K < 2x_K 0.1^{K-1} + \left(0.1^{K-1}\right)^2 - 0.01^K b_{K+1}$$

$$d_K + 0.01^K b_{K+1} < \left(c_K + 0.1^{K-1}\right)0.1^{K-1}$$

さらに、$d_K \geq 0$、$b_K \geq 0$ より

$$0 \leq d_K + 0.01^K b_{K+1} < \left(c_K + 0.1^{K-1}\right)0.1^{K-1} \quad \cdots(16)$$

ここで、関数 $f(t)$ を

$$f(t) = \left(c_K + 0.1^K t\right)0.1^K t$$

で定めると、$0 \leq t \leq 10$ の範囲では t が増加するとき $f(t)$ は増加し、(16)より

$$f(0) \leq d_K + 0.01^K b_{K+1} < f(10)$$

であるから、

$$f(p) \leq d_K + 0.01^K b_K < f(p+1)$$

を満たす 0 以上 9 以下の整数 p が存在する。これを y_{K+1} とすればよい。以上より、☆を満たす y_{n+1} が存在し、数列 $\{x_n\}$、$\{y_n\}$ が定義できることが示された。

このように数列 $\{x_n\}$、$\{y_n\}$ を定義したとき、

$$x_n{}^2 \leq a_N < \left(x_n + 0.1^{n-1}\right)^2 \quad \cdots◎$$

が成り立つことを示す。

(12)と同様にすると、任意の自然数 n に対して

$$x_n{}^2 \le a_n < \left(x_n + 0.1^{n-1}\right)^2 \quad \cdots(17)$$

$n \ge N$ ならば、

$$a_n = a_N$$

であるから、◎は自明である。以下で $n < N$ の場合を考える。

(17)より

$$100^{n-1} a_n < \left(10^{n-1} x_n + 1\right)^2$$

(13)(14)と同様に、この不等式の両辺は整数であるから

$$100^{n-1} a_n + 1 \le \left(10^{n-1} x_n + 1\right)^2$$

$$a_n + 0.01^{n-1} \le \left(x_n + 0.1^{n-1}\right)^2 \quad \cdots(18)$$

$b_k < 100$ であるから(1)より

$$\begin{aligned}
& a_N \\
&= \sum_{k=1}^{N} 0.01^{k-1} b_k \\
&= \sum_{k=1}^{n} 0.01^{k-1} b_k + \sum_{k=n+1}^{N} 0.01^{k-1} b_k \\
&= a_n + \sum_{k=n+1}^{N} 0.01^{k-1} b_k \\
&\le a_n + \sum_{k=n+1}^{N} 0.01^{k-1} \cdot 99 \\
&= a_n + \frac{99 \cdot 0.01^n \left(1 - 0.01^{N-n}\right)}{1 - 0.01} \\
&< a_n + 0.01^{n-1} \quad \cdots(19)
\end{aligned}$$

(18)(19)より

$$a_N < a_n + 0.01^{n-1} \le \left(x_n + 0.1^{n-1}\right)^2$$

ゆえに

$$a_N < \left(x_n + 0.1^{n-1}\right)^2 \quad \cdots(20)$$

$b_k \ge 0$ より

$$a_n \le a_N \quad \cdots(21)$$

(17)(21)より

$$x_n{}^2 \leq a_n \leq a_N$$

ゆえに

$$x_n{}^2 \leq a_N \quad \cdots(22)$$

(20)(22)より

$$x_n{}^2 \leq a_N < \left(x_n + 0.1^{n-1}\right)^2$$

以上より任意の自然数nに対して◎が成り立つことが示された。
（証明おわり）

証明を見てみるとこの筆算が非常にうまくできていることに気づきます。(8)の式

$$d_{n+1} = d_n + 0.01^n b_{n+1} - \left(x_{n+1}{}^2 - x_n{}^2\right)$$

において、

$$x_{n+1} = x_n + 0.1^n y_{n+1}$$

だったので

$$d_{n+1} = d_n + 0.01^n b_n - \left\{2x_n \cdot 0.1^n y_{n+1} + \left(0.1^n y_{n+1}\right)^2\right\}$$

ですが、この式の

$$\left\{2x_n \cdot 0.1^n y_{n+1} + \left(0.1^n y_{n+1}\right)^2\right\}$$

の部分を効率よく計算するためには$2x_n$を計算しておく必要があります。x_nというのは右の一番上に書かれているものなので毎回２倍してもよいのですが、

$$2x_{n+1} = 2x_n + 2 \cdot 0.1^n y_{n+1}$$

が成り立つので、順に$2 \cdot 0.1^n y_{n+1}$を足していけばいいということになります。この計算を左側でやっているんですね。しかも空いている桁にy_{n+1}を書き込むことによって効率よく計算できていて、さらには、

$$\left\{2x_n \cdot 0.1^n y_{n+1} + \left(0.1^n y_{n+1}\right)^2\right\} = \left(2x_n + 0.1^n y_{n+1}\right)y_{n+1}$$

を計算しやすくしています。あとでやる立方根の計算ではこんなにうまくはいきません。

仕組みを大雑把に確認しておくと次のようになります。

・左側に $2x_n$ を計算していく。

・右側では $d_n = a_n - x_n{}^2$ を計算していく

・関係式

$$d_{n+1} = d_n + 0.01^n b_n - \left\{ 2x_n \cdot 0.1^n y_{n+1} + \left(0.1^n y_{n+1}\right)^2 \right\}$$

を利用して、左側の $2x_n$ を見ながら右側を計算する。

・関係式

$$2x_{n+1} = 2x_n + 2 \cdot 0.1^n y_{n+1}$$

を利用して左側を計算する。

このような仕組みで計算しているので、図２のような計算も可能です。こちらは上で述べたような巧妙な方法を用いることなく計算しています。

図２

$r = 0.1$ とします。

2xn

```
1
1
------
2 0
  4
  4
--------
2 8 0
    1
    1
----------
2 8 2 0
      4
      4
------------
2 8 2 8 0
        2
        2
------------
2 8 2 8 4
```

2xnryn+(ryn)2

```
  8 0
  1 6
  -------
  9 6
  2 8 0
      1
  -------
  2 8 1
1 1 2 8 0
      1 6
---------
1 1 2 9 6
  5 6 5 6 0
          4
  ---------
  5 6 5 6 4
```

```
    1   4   1   4   2
  -----------------------
√ 2. 0 0 0 0 0 0 0 0
  1
  ------
  1 0 0
    9 6
  ------
    4 0 0
    2 8 1
    ------
    1 1 9 0 0
    1 1 2 9 6
    ---------
        6 0 4 0 0
        5 6 5 6 4
        ---------
          3 8 3 6
```

図１と図２の違いは空いている桁に y_{n+1} を書き込むのではなく、下に書いているところです。それにともなって、$2x_n\,0.1^n\,y_{n+1}$ と $\left(0.1^n\,y_{n+1}\right)^2$ を書いて加える必要が生じています。

漸化式としては同じなので、証明は同じです。

※立方根の計算（開立、開立法とも呼ばれます。）

開平を参考にしながら、開立の計算を考えてみましょう。

$$\left(x_n + 0.1^n\, y_{n+1}\right)^2 - x_n{}^2 = 2x_n\, 0.1^n\, y_{n+1} + \left(0.1^n\, y_{n+1}\right)^2$$

ですから、$2x_n$ を求めておく必要があり、これを左側で計算していたのでした。立方根を計算していくのに、

$$\left(x_n + 0.1^n\, y_{n+1}\right)^3 - x_n{}^3 = 3x_n{}^2\, 0.1^n\, y_{n+1} + 3x_n \left(0.1^n\, y_{n+1}\right)^2 + \left(0.1^n\, y_{n+1}\right)^3$$

を利用することにしましょう。これには $3x_n{}^2$ 、$3x_n$ を左側で計算していく必要がありそうです。

$$3\left(x_n + 0.1^n\, y_{n+1}\right) = 3x_n + 3 \cdot 0.1^n\, y_{n+1}$$

ですから、$3x_n$ を求めていくには順に $3 \cdot 0.1^n\, y_{n+1}$ を加えていけばよさそうです。一方で

$$3\left(x_n + 0.1^n\, y_{n+1}\right)^2 = 3x_n{}^2 + 6x_n\, 0.1^n\, y_{n+1} + 3\left(0.1^n\, y_{n+1}\right)^2$$

ですから、$3x_n{}^2$ を求めていくには、$6x_n$ を利用するとうまくいきそうです。これには

$$6x_n = 2 \cdot 3x_n$$

を利用して、$3x_n$ を利用して進めていくと効率よく計算できます。このアイデアでいくと、立方根の計算は次の図３ようになります。

図３

A	B	C	D
			1 2 5 9
1	1		E ＞ √ 2 | 000000000
1	1		1
1	1		1000
30	300	300	728
2	60	60	272000
2	60	4	225125
2	4	364	46875000
360	4		42491979
5	4		4383021
5	43200	43200	
5	1800	1800	
3750	1800	25	
9	25	45025	
9	25		
9	25		
3777	4687500	4687500	
	33750	33750	
	33750	81	
	81	4721331	
	81		
	81		
	4755243		

手順は次のようになります。

(1)　D欄の最上段に３乗がEを超えない最大の整数を書く。

(2)　D欄の下段に(1)の３乗を書く。

(3)　D欄の２行の差を求める。末尾にE欄の対応する位の数を３桁下ろす。

(4)　A欄に(1)を３個並べる。

(5)　A欄の３行の和を求める。末尾に０を１個付け加える

(6)　B欄に(1)の２乗を３回書く。

(7)　Ｂ欄の３行の和を求める。末尾に０を２個付け加える。

(8)　Ｄ欄の最上段末尾に０以上９以下の整数を書く。ただし、(14)の差を求めたときにその差が０以上になるもののうち、最大のものをとる。（(14)までの計算を想像してこの時点で(8)を決定するのは困難であるが、(3)を(7)で割ったときの商を考え、大きすぎる場合は減らすとよい。）

(9)　Ｂ欄の数をＣ欄に書く。

(10)　(5)(8)の積をＣ欄に書く。

(11)　(8)の２乗をＣ欄に書く。

(12)　Ｃ欄の３行(9)(10)(11)の和をＣ欄に書く。

(13)　(8)(12)の積をＤ欄に書く。

(14)　Ｄ欄の２行(3)(13)の差を求める。末尾にＥ欄の対応する位の数を３桁下ろす。

(15)　Ａ欄に(8)を３回書く。

(16)　Ａ欄の４行の和を求める。末尾に０を１個付け加える。

(17)　Ｂ欄に(10)を２回書く。

(18)　Ｂ欄に(11)を３回書く。

(19)　Ｂ欄の６行の和を求める。末尾に０を２個付け加える。

(20)　Ｄ欄の最上段末尾に０以上９以下の整数を書く。ただし、(26)の差を求めたときにその差が０以上になるもののうち、最大のものをとる。

(21)　Ｃ欄に(19)を書く。

(22)　Ｃ欄に(16)(20)の積を書く。

(23)　Ｃ欄に(20)の２乗を書く。

(24)　Ｃ欄の３行の和を求める。

(25)　(20)(24)の積をＤ欄に書く。

(26)　Ｄ欄の２行(14)(25)の差を求める。末尾にＥ欄の対応する位の数を３桁下ろす。

(27)　Ａ欄に(20)を３回書く。

(28)　Ａ欄の４行の和を求める。末尾に０を１個付け加える。

(29)　Ｂ欄に(22)を２回書く。

(30)　Ｂ欄に(23)を３回書く。

(31)　Ｂ欄の６行の和を求める。末尾に０を２個付け加える。

(32)　Ｄ欄の最上段末尾に０以上９以下の整数を書く。ただし、(38)の差を求めたときにその差が０以上になるもののうち、最大のものをとる。

(33)　Ｃ欄に(31)を書く。

(34)　Ｃ欄に(28)(32)の積を書く。

(35)　Ｃ欄に(32)の２乗を書く。

(36)　Ｃ欄の３行の和を求める。

(37)　(32)(36)の積をＤ欄に書く。

(38)　Ｄ欄の２行の差を求める。末尾にＥ欄の対応する位の数を３桁下ろす。

(39)　Ａ欄に(32)を３回書く。

(40)　Ａ欄の４行の和を求める。末尾に０を１個付け加える。

(41)　Ｂ欄に(34)を２回書く。

(42)　Ｂ欄に(35)を３回書く。

(43)　Ｂ欄の６行の和を求める。末尾に０を２個付け加える。

…

［証明］

次の関係式を満たす数列$\{a_n\}$、$\{b_n\}$、$\{c_n\}$、$\{d_n\}$、$\{e_n\}$、$\{x_n\}$、$\{y_n\}$を考える。ただし、数列$\{b_n\}$はあらかじめ与えられたものとする。Nは自然数であるとする。

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} 0.001^{k-1} b_k \quad \cdots(1)$$

$$x_n = \sum_{k=1}^{n} 0.1^{k-1} y_k \quad \cdots(2)$$

$$c_1 = 3y_1 \quad \cdots(3)$$

$$c_{n+1} = c_n + 3 \cdot 0.1^n y_{n+1} \quad \cdots(4)$$

$$d_1 = 3{y_1}^2 \quad \cdots(5)$$

$$d_{n+1} = d_n + 2c_n \cdot 0.1^n y_{n+1} + 3 \cdot \left(0.1^n y_{n+1}\right)^2 \quad \cdots(6)$$

$$e_1 = b_1 - {y_1}^3 \quad \cdots(7)$$

$$e_{n+1} = e_n + 0.001^n b_{n+1} - \left\{d_n + 0.1^n c_n y_{n+1} + \left(0.1^n y_{n+1}\right)^2\right\} 0.1^n y_{n+1} \quad \cdots(8)$$

y_n：(8)でy_{n+1}を決定するとき、0以上9以下の整数で$e_{n+1} \geq 0$となるもののうち最大のものをy_{n+1}とする。またy_1は0以上9以下の整数で、$b_1 \geq {y_1}^2$を満たす最大

b_n：0以上999以下の整数、$n > N$ならば$b_n = 0$

このとき、

$${x_n}^3 \leq a_N < \left(x_n + 0.1^{n-1}\right)^3$$

が成り立つ。

［証明］（平方根の場合とほぼ同様なので一部省略します。）
（これらの数列を定めることができているとすると）
(2)(3)(4)より

$c_n = 3x_n$　（$1 \le n$）　…(9)

(6)(9)より

$$d_{n+1} = d_n + 6x_n \cdot 0.1^n y_{n+1} + 3 \cdot \left(0.1^n y_{n+1}\right)^2 = d_n + 3\left(x_n + 0.1^n y_{n+1}\right)^2 - 3x_n{}^2$$

…(10)

(2)(10)より、

$d_{n+1} = d_n + 3x_{n+1}{}^2 - 3x_n{}^2$　…(11)

(2)(5)(11)より、

$d_n = 3x_n{}^2$　（$1 \le n$）　…(12)

(2)(8)(9)(12)より、

e_{n+1}

$= e_n + 0.001^n b_{n+1} - \left\{3x_n{}^2 + 3x_n \cdot 0.1^n y_{n+1} + \left(0.1^n y_{n+1}\right)^2\right\} 0.1^n y_{n+1}$

$= e_n + 0.001^n b_{n+1} - \left(x_{n+1}{}^3 - x_n{}^3\right)$　…(13)

(1)(2)(7)(13)より

$e_n = a_n - x_n{}^3$　（$1 \le n$）　…(14)

$e_n \ge 0$ より

$x_n{}^3 \le a_n$　…(15)

☆の y_{n+1} の取り方と(8)(9)(12)(14)より

$0 > e_n + 0.001^n b_{n+1} - \left\{3x_n{}^2 + 3x_n \cdot 0.1^n (y_{n+1}+1) + \left(0.1^n (y_{n+1}+1)\right)^2\right\} 0.1^n (y_{n+1}+1)$

$0 > e_n + 0.001^n b_{n+1} - \left\{\left(x_n + 0.1^n (y_{n+1}+1)\right)^3 - x_n{}^3\right\}$

$0 > a_n - x_n{}^3 + 0.001^n b_{n+1} - \left\{\left(x_n + 0.1^n (y_{n+1}+1)\right)^3 - x_n{}^3\right\}$

$0 > a_{n+1} - x_n{}^3 - \left\{\left(x_n + 0.1^n (y_{n+1}+1)\right)^3 - x_n{}^3\right\}$

$$0 > a_{n+1} - \left(x_{n+1} + 0.1^{n}\right)^{3}$$

$$a_{n+1} < \left(x_{n+1} + 0.1^{n}\right)^{3} \quad \cdots（16）$$

(15)(16)より

$$x_{n}{}^{3} \le a_{n} < \left(x_{n} + 0.1^{n-1}\right)^{3} \quad \cdots(17)$$

したがって、$1 \le n \le K$ の範囲でこれらの数列が定義されていたとすると、

$$a_{K} < \left(x_{K} + 0.1^{K-1}\right)^{3}$$

両辺を10^{3K-3}倍すると、

$$10^{3K-3} a_{K} < \left(10^{K-1} x_{K} + 1\right)^{3}$$

この両辺は整数であるから、

$$10^{3K-3} a_{K} \le \left(10^{K-1} x_{K} + 1\right)^{3} - 1$$

$b_{K+1} < 1000$ より

$$10^{3K-3} a_{K} \le \left(10^{K-1} x_{K} + 1\right)^{3} - 1 < \left(10^{K-1} x_{K} + 1\right) - 10^{-3} b_{K+1}$$

ゆえに、

$$10^{3K-3} a_{K} < \left(10^{K-1} x_{K} + 1\right) - 10^{-3} b_{K+1}$$

両辺を0.1^{3K-3}倍すると、

$$a_{K} < \left(x_{K} + 0.1^{K-1}\right)^{3} - 0.001^{K} b_{K+1} \quad \cdots(18)$$

(14)(18)より

$$e_{K} + x_{K}{}^{3} < \left(x_{K} + 0.1^{K-1}\right)^{3} - 0.001^{K} b_{K+1}$$

$$e_{K} + 0.001^{K} b_{K+1} < \left(x_{K} + 0.1^{K-1}\right)^{3} - x_{K}{}^{3}$$

$$e_{K} + 0.001^{K} b_{K+1} < 3x_{K}{}^{2} \cdot 0.1^{K-1} + 3x_{K} \cdot \left(0.1^{K-1}\right)^{2} + \left(0.1^{K-1}\right)^{3}$$

$$e_{K} + 0.001^{K} b_{K+1} < \left\{3x_{K}{}^{2} + 3x_{K} \cdot 0.1^{K-1} + \left(0.1^{K-1}\right)^{2}\right\} 0.1^{K-1}$$

これと$e_{K} \ge 0$、$b_{K} \ge 0$ より

$$0 \le e_{K} + 0.001^{K} b_{K+1} < \left\{3x_{K}{}^{2} + 3x_{K} \cdot 0.1^{K-1} + \left(0.1^{K-1}\right)^{2}\right\} 0.1^{K-1} \quad \cdots(19)$$

ここで

$$f(t)=\left\{3x_K^{\ 2}+3x_K\cdot 0.1^K t+\left(0.1^K t\right)^2\right\}0.1^K t \qquad (0\le t\le 10)$$

とすると(19)より

$$f(0)\le e_K+0.001^K b_{K+1}<f(10)$$

であり、$f(t)$はtが増加するとき増加するから

$$f(p)\le e_K+0.001^K b_{K+1}<f(p+1)$$

を満たす整数pがただ一つ定まる。このpをy_{K+1}とすればよい。以上より、☆の条件を満たす$\{y_n\}$が定義できることができることが示された。

次にこのように定義された$\{x_n\}$、$\{y_n\}$に対して

$$x_n^{\ 3}\le a_N<\left(x_n+0.1^{n-1}\right)^3$$

が成り立つことを示す。$n\ge N$のときは$a_n=a_N$であるから、(17)より明らか。以下では$n<N$の場合を考える。

(17)より

$$a_n<\left(x_n+0.1^{n-1}\right)^3$$

両辺を10^{3n-3}倍すると

$$1000^{n-1}a_n<\left(10^{n-1}x_n+1\right)^3$$

両辺は整数であるから

$$1000^{n-1}a_n\le\left(10^{n-1}x_n+1\right)^3-1$$

両辺を0.1^{3n-3}倍すると

$$a_n\le\left(x_n+0.1^{n-1}\right)^3-0.001^{n-1} \quad \cdots(20)$$

$b_j\le 999 \quad (n+1\le j\le N)$ より

$$\sum_{j=n+1}^{N}0.001^{j-1}b_j\le\sum_{j=n+1}^{N}0.001^{j-1}\cdot 999=\frac{0.001^n\cdot 999\left(1-0.001^{N-n}\right)}{1-0.001}<0.001^{n-1} \quad \cdots(21)$$

(20)(21)より

$$a_n\le\left(x_n+0.1^{n-1}\right)^3-0.001^{n-1}<\left(x_n+0.1^{n-1}\right)^3-\sum_{j=n+1}^{N}0.001^{j-1}b_j$$

ゆえに

$$a_n<\left(x_n+0.1^{n-1}\right)^3-\sum_{j=n+1}^{N}0.001^{j-1}b_j$$

$$a_n + \sum_{j=n+1}^{N} 0.001^{j-1} b_j < \left(x_n + 0.1^{n-1}\right)^3$$

$$a_N < \left(x_n + 0.1^{n-1}\right)^3 \quad \cdots(22)$$

(17)と $b_j \geq 0$　（$n+1 \leq j \leq N$）より

$$x_n^{\ 3} \leq a_n \leq a_n + \sum_{j=n+1}^{N} 0.001^{j-1} b_j$$

ゆえに

$$x_n^{\ 3} \leq a_N \quad \cdots(23)$$

(22)(23)より

$$x_n^{\ 3} \leq a_N < \left(x_n + 0.1^{n-1}\right)^3$$

（証明おわり）

※４乗根も開いてみます…

４乗根を開くには、どうすればよいのかも考えてみます。$Y_n = 0.1^n y_{n+1}$ とします（数式が長くなって１行におさまらなくなったので置き換えました）。

$$(x_n + Y_n)^4 - x_n^4 = 4x_n^3 Y_n + 6x_n^2 Y_n^2 + 4x_n Y_n^3 + Y_n^4$$

ですので、$4x_n^3$ 、$6x_n^2$ 、$4x_n$ を計算していけばよさそうです。これらを計算するには

$$4(x_n + Y_n)^3$$

$$= 4x_n^3 + 12x_n^2 Y_n + 12x_n Y_n^2 + 4Y_n^3$$

$$= 4x_n^3 + 2 \cdot 6x_n^2 Y_n + 3 \cdot 4x_n Y_n^2 + 4Y_n^3$$

$$6(x_n + Y_n)^2$$

$$= 6x_n^2 + 12x_n Y_n + 6Y_n^2$$

$$= 6x_n + 3 \cdot 4x_n Y_n + 6Y_n^2$$

$$4(x_n + Y_n) - 4x_n$$
$$= 4Y_n$$

ですから、$4x_n^3$ を計算するのには $6x_n^2$ と $4x_n$ を利用し、$6x_n^2$ を計算するには $4x_n$ を利用することができます。あとは具体的に手順をくみ上げればよいのですが、問題がいくつかあります。

・y_n^4 は一桁の整数の４乗です。３乗ぐらいまでなら暗算でできますが、４乗はちょっとつらい…。

・$4x_n^3$ 、$6x_n^2$ 、$4x_n$ と $a_n - x_n^4$ と計算しなければならないものが増えてます。それぞれの桁数も相当なものになるので、計算量が増えます。

・表が大きくなります。十分なスペースを用意し、桁を揃えてかきましょう。

ではやってみます。表が大きくなるので、紙の使い方を変えます。

図４

A

```
1
1
1
1
4 0
  1
  1
  1
  1
4 4 0
    8
    8
    8
    8
4 7 2
```

B

```
1
1
1
1
1
1
6 0 0
  4 0
  4 0
  4 0
    1
    1
    1
    1
    1
    1
    1
7 2 6 0 0
  3 5 2 0
  3 5 2 0
  3 5 2 0
      6 4
      6 4
      6 4
      6 4
      6 4
      6 4
8 3 5 4 4
```

C

```
1
1
1
1
4 0 0 0
  6 0 0
  6 0 0
    4 0
    4 0
    4 0
      1
      1
      1
      1
5 3 2 4 0 0 0
  5 8 0 8 0 0
  5 8 0 8 0 0
    2 8 1 6 0
    2 8 1 6 0
    2 8 1 6 0
        5 1 2
        5 1 2
        5 1 2
        5 1 2
6 5 7 2 1 2 8
```

D

```
1      1        1          1
     4 0      4 0        4 0
          6 0 0      6 0 0
                   4 0 0 0
                   4 6 4 1

1        8          6 4              5 1 2
     4 4 0      3 5 2 0          2 8 1 6 0
            7 2 6 0 0          5 8 0 8 0 0
                             5 3 2 4 0 0 0
                             5 9 3 3 4 7 2
```

E

```
           1       1       8
F  >  √ 2 | 0 0 0 0 0 0 0 0
           1
           1 0 0 0 0
             4 6 4 1
             5 3 5 9 0 0 0 0
             4 7 4 6 7 7 7 6
               6 1 2 2 2 2 4
```

手順は次の通りです。

(1)　Ｅ欄の最上段に４乗がＦ欄下段の数を越えない最大の整数を書く。
(2)　(1) の４乗をＥ欄に書く。
(3)　Ｆ欄、Ｅ欄の２行の差を求める。末尾に 0 を４個付け加える。
(4)　Ａ欄に (1) を４回書く。
(5)　Ａ欄の４行を足す。末尾に 0 を１個付け加える。
(6)　Ｂ欄に (1) の二乗を６回書く。
(7)　Ｂ欄の６行を足す。末尾に 0 を２個付け加える。
(8)　Ｃ欄に (1) の３乗を４回書く。
(9)　Ｃ欄の４行を足す。末尾に 0 を３個付け加える。
(10)　Ｅ欄の最上段に一桁の整数を書く。ただし(17)まで計算したときに(17)の差が 0 以上になるもののうち最大のものを書く。
(11)　Ｄ欄左に１を書く。
(12)　(11)に(10)を掛けたものをＤ欄右に書く。下段にＡ欄の数を書く。
(13)　(12)に(10)を掛けたものをＤ欄右に書く。下段にＢ欄の数を書く。
(14)　(13)に(10)を掛けたものをＤ欄右に書く。下段にＣ欄の数を書く。
(15)　Ｄ欄の一番右の４行を加えたものをＤ欄に書く。
(16)　(15)に(10)を掛けたものをＥ欄に書く。
(17)　Ｅ欄の２行の差を求める。末尾に 0 を４個付け加える。
(18)　Ａ欄にＤ欄左から２列目の下から２行目の数を４回書く。
(19)　Ａ欄の５行を足す。末尾に 0 を１個付け加える。
(20)　Ｂ欄にＤ欄左から３列目の下から２行目の数を３回書く。
(21)　Ｂ欄にＤ欄左から３列目の下から３行目の数を６回書く。
(22)　Ｂ欄の 10 行の数を足す。末尾に 0 を２個付け加える。
(23)　Ｃ欄にＤ欄左から４列目の下から２行目の数を２回書く。
(24)　Ｃ欄にＤ欄左から４列目の下から３行目の数を３回書く。
(25)　Ｃ欄にＤ欄左から４列目の下から４行目の数を４回書く。
(26)　Ｃ欄の 10 行を足す。末尾に 0 を３個付け加える。
(27)　Ｅ欄に一桁の整数を書く。ただし(34)まで計算したときに(34)の差が 0 以上になるもののうち最大のものを書く。
(28)　Ｄ欄左に１を書く。
(29)　(28)に(27)を掛けたものをＤ欄右に書く。下段にＡ欄の数を書く。
(30)　(29)に(27)を掛けたものをＤ欄右に書く。下段にＢ欄の数を書く。
(31)　(30)に(27)を掛けたものをＤ欄右に書く。下段にＣ欄の数を書く。
(32)　Ｄ欄の一番右の欄の４行を加えたものをＤ欄に書く。

(33)　(32)に(27)を掛けたものをＥ欄に書く。

(34)　Ｅ欄の２行の差を求める。末尾に０を４個付け加える。

(35)　Ａ欄にＤ欄左から２列目の下から２行目の数を４回書く。

(36)　Ａ欄の５行を足す。末尾に０を１個付け加える。

(37)　Ｂ欄にＤ欄左から３列目の下から２行目の数を３回書く。

(38)　Ｂ欄にＤ欄左から３列目の下から３行目の数を６回書く。

(39)　Ｂ欄の 10 行の数を足す。末尾に０を２個付け加える。

(40)　Ｃ欄にＤ欄左から４列目の下から２行目の数を２回書く。

(41)　Ｃ欄にＤ欄左から４列目の下から３行目の数を３回書く。

(42)　Ｃ欄にＤ欄左から４列目の下から４行目の数を４回書く。

(43)　Ｃ欄の 10 行を足す。末尾に０を３個付け加える。

…

証明はほぼ同様ですのでやりません。

※最後に５乗根も開いてみます

　４乗根と同じように５乗根も開くことができます。４乗根までは左側の欄で同じ数を縦に何個か並べて足していましたが、もちろん掛け算しても同じことですよね。これからやる手順では掛け算をしてやってみます。

図5

```
   A       B          C               D
  50    1000      10000           50000
   5     200       3000           20000
 ---      10        300            3000
 550   ------        10             200
  20   121000   ---------             5
 ---     8800   13310000      -----------
 570      160    1452000      732050000
       ------      52800      106480000
       129960        640        5808000
                ---------        140800
                14815440           1280
                              -----------
                              844480080
```

E

```
1   1      1      1      1
   50     50     50     50
        1000   1000   1000
              10000  10000
                     50000
                     -----
                     61051

1   4     16     64      256
  550   2200   8800    35200
      121000 484000  1936000
           13310000 53240000
                   732050000
                   ---------
                   787261456
```

F

```
       1    1    4
G > √ 20000000000
      1
      -
      100000
       61051
       ---------
       3894900000
       3149045824
       ----------
        745854176
```

手順は次のようになります。

(1)　Ｆ欄に５乗がＧ欄を越えない最大の整数を書く。

(2)　Ｆ欄に(1)の５乗を書いて、Ｆ欄の２行の差を求める。末尾に０を５個付け加える。

(3)　Ａ欄に(1)の５倍を書く。末尾に０を１個付け加える。

(4)　Ｂ欄に(1)の２乗の 10 倍を書く。さらに末尾に０を２個付け加える。

(5)　Ｃ欄に(1)の３乗の 10 倍を書く。さらに末尾に０を３個付け加える。

(6)　Ｄ欄に(1)の４乗の５倍を書く。さらに末尾に０を４個付け加える。

(7)　Ｆ欄に一桁の整数を書く。ただし、(15)まで計算したとき(15)が負にならないような最大の整数を書く。

(8)　Ｅ欄左に１を書く。

(9)　Ｅ欄右に(8)に(7)を掛けたものを書く。下にＡ欄の数を写す。

(10)　Ｅ欄右に(9)に(7)を掛けたものを書く。下にＢ欄の数を写す。

(11)　Ｅ欄右に(10)に(7)を掛けたものを書く。下にＣ欄の数を写す。

(12)　Ｅ欄右に(11)に(7)を掛けたものを書く。下にＤ欄の数を写す。

(13)　Ｅ欄の一番右の５行を加える。

(14)　(13)に(7)を掛けたものをＦ欄に書く。

(15)　Ｆ欄の２行の差を求める。末尾に０を５個付け加える。

(16)　Ｅ欄の右から２列目、下から２行目の５倍をＡ欄に書く。

(17)　Ａ欄の２行を加える。末尾に０を１個付け加える。

(18)　Ｅ欄の右から３列目、下から２行目の４倍をＢ欄に書く。

(19)　Ｅ欄の右から３列目、下から３行目の 10 倍をＢ欄に書く。

(20)　Ｂ欄の３行を加える。末尾に０を２個付け加える。

(21)　Ｅ欄の右から４列目、下から２行目の３倍をＣ欄に書く。

(22)　Ｅ欄の右から４列目、下から３行目の６倍をＣ欄に書く。

(23)　Ｅ欄の右から４列目、下から４行目の 10 倍をＣ欄に書く。

(24)　Ｃ欄の４行を加える。末尾に０を３個付け加える。

(25)　Ｅ欄の右から５列目、下から２行目の２倍をＤ欄に書く。

(26)　Ｅ欄の右から５列目、下から３行目の３倍をＤ欄に書く。

(27)　Ｅ欄の右から５列目、下から４行目の４倍をＤ欄に書く。

(28)　Ｅ欄の右から５列目、下から５行目の５倍をＤ欄に書く。

(29)　Ｄ欄の５行を加える。末尾に０を４個付け加える。

(30)　Ｆ欄に一桁の整数を書く。ただし、(38)まで計算したとき(38)が負にならないような最大の整数を書く。

(31)　Ｅ欄左に１を書く。

(32)　Ｅ欄右に(31)に(30)を掛けたものを書く。下にＡ欄の数を写す。

(33)　Ｅ欄右に(32)に(30)を掛けたものを書く。下にＢ欄の数を写す。

(34)　Ｅ欄右に(33)に(30)を掛けたものを書く。下にＣ欄の数を写す。

(35)　Ｅ欄右に(34)に(30)を掛けたものを書く。下にＤ欄の数を写す。

(36)　Ｅ欄の一番右の５行を加える。

(37)　(36)に(30)を掛けたものをＦ欄に書く。

(38)　Ｆ欄の２行の差を求める。末尾に0を５個付け加える。

(39)　Ｅ欄の右から２列目、下から２行目の５倍をＡ欄に書く。

(40)　Ａ欄の２行を加える。末尾に0を１個付け加える。

(41)　Ｅ欄の右から３列目、下から２行目の４倍をＢ欄に書く。

(42)　Ｅ欄の右から３列目、下から３行目の10倍をＢ欄に書く。

(43)　Ｂ欄の３行を加える。末尾に0を２個付け加える。

(44)　Ｅ欄の右から４列目、下から２行目の３倍をＣ欄に書く。

(45)　Ｅ欄の右から４列目、下から３行目の６倍をＣ欄に書く。

(46)　Ｅ欄の右から４列目、下から４行目の10倍をＣ欄に書く。

(47)　Ｃ欄の４行を加える。末尾に0を３個付け加える。

(48)　Ｅ欄の右から５列目、下から２行目の２倍をＤ欄に書く。

(49)　Ｅ欄の右から５列目、下から３行目の３倍をＤ欄に書く。

(50)　Ｅ欄の右から５列目、下から４行目の４倍をＤ欄に書く。

(51)　Ｅ欄の右から５列目、下から５行目の５倍をＤ欄に書く。

(52)　Ｄ欄の５行を加える。末尾に0を４個付け加える。

…

証明はやりません！

製作：赤門会（math.akamon-kai.co.jp）